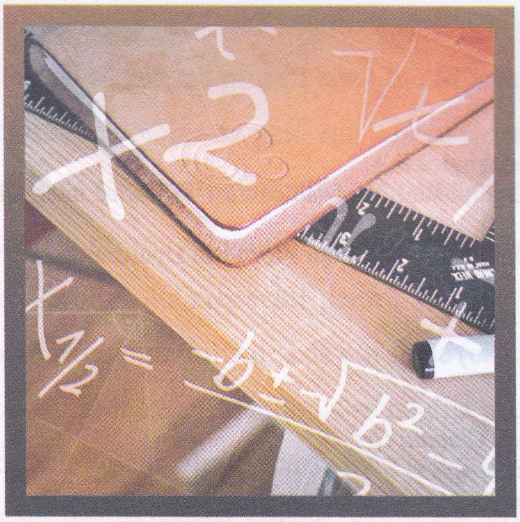
Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

COSTEL DOBRE CHITEȘ, DANIELA CHITEȘ, VLAD FLORENTIN DRINCEANU

PERSPECTIVE CULTURALE GENERATE DE MATEMATICĂ

PENTRU CLASA A V-A



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ S.A.

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Cuprins

Introducere 3
COMPETENȚE GENERALE ȘI SPECIFICE CARE VOR FI DOBÂNDITE PÂNĂ LA FINALUL CLASEI A V-A 7

1. AM ÎNVĂȚAT ÎN CICLUL PRIMAR 8
1.1. Numerele naturale și operații cu acestea 8
1.1.1. Adunarea numerelor naturale 8
1.1.2. Scăderea numerelor naturale 9
1.1.3. Înmulţirea numerelor naturale 11
1.1.4. Împărţirea numerelor naturale 12
1.2. Fracții 17
1.3. Figuri și corpuri geometrice 23
1.3.1. Numere figurative 23
1.3.2. Corpuri solide 27
1.4. Unități de măsură 31
Teste de evaluare 36

2. OPERAȚII CU NUMERE NATURALE 39
2.1. Scrierea și citirea numerelor naturale 39
2.1.1. Şirul numerelor naturale 41
2.1.2. Cifrele romane 42
2.2. Reprezentarea numerelor naturale pe axa numerelor 46
2.3. Compararea numerelor naturale 47
2.4. Aproximări și rotunjiri 47
2.5. Adunarea și scăderea numerelor naturale 51
2.5.1. Adunarea numerelor naturale 51
2.5.2. Scăderea numerelor naturale 53
2.6. Înmulțirea numerelor naturale 59
2.7. Factorul comun 62
2.8. Împărțirea numerelor naturale 65
2.8.1. Împărţirea cu rest zero a numerelor naturale 65
2.8.2. Teorema împărţirii cu rest pentru numerele naturale 66
2.9. Puterea unui număr natural 72
2.9.1. Puterea cu exponent natural a unui număr natural 72
2.9.2. Operaţii cu puteri 76
2.9.3. Compararea puterilor 79
2.9.4. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte 83
2.10. Baze de numeraţie 89
2.10.1. Scrierea numerelor naturale în baza 10 89
2.10.2. Scrierea numerelor naturale în baza 2 91
2.11. Ordinea efectuării operaţiilor 96
2.12. Metode aritmetice de rezolvare a problemelor 99
2.12.1. Metoda reducerii la unitate 99
2.12.2. Metoda comparaţiei 101
2.12.3. Metoda figurativă 102
2.12.4. Metoda mersului invers 103
2.12.5. Metoda falsei ipoteze 104
Probleme recapitulative 106
Teste de evaluare 107
2.13. Divizibilitatea numerelor naturale 110
2.13.1. Divizorii și multiplii unui număr natural 110
2.13.2. Criterii de divizibilitate 114
2.14. Numere prime, numere compuse 119

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

3. FRACȚII
3.1. Fracții ordinare 124
3.1.1. Fracții subunitare, echiunitare și supraunitare 124
3.1.2 Fracții echivalente 125
3.1.3. Amplificarea și simplificarea fracțiilor 126
3.1.4. Adunarea numerelor fracționare 130
3.1.5. Introducerea și scoaterea întregilor dintr-o fracție 136
3.1.6. Compararea numerelor fracționare 140
3.1.7. Scăderea numerelor fracționare 142
3.1.8. Înmulțirea numerelor fracționare 146
3.1.9. Ridicarea la putere a numerelor fracționare 150
3.1.10. Împărțirea numerelor fracționare 155
3.1.11. Ordinea efectuării operațiilor 156
3.2. Fracții zecimale 158
3.2.1. Scrierea unei fracții ordinare sub formă de fracție zecimală 163
3.2.2. Aproximarea fracțiilor zecimale 163
3.2.3. Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule 168
3.2.4. Înmulțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule 171
3.2.5. Ridicarea la putere a fracțiilor zecimale nenule 174
3.2.6. Împărțirea fracțiilor zecimale 176
3.2.7. Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive 178
Probleme recapitulative 185
Teste de autoevaluare 187
.... 190
4. ELEMENTE DE GEOMETRIE. UNITĂȚI DE MĂSURĂ. PROBLEME DE ORGANIZARE A DATELOR, FRECVENȚĂ. DATE STATISTICE 192
4.1. Elemente de geometrie 192
4.1.1. Punct, dreaptă, plan, semidreaptă, segment, semiplan 192
4.1.2. Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă. Puncte coliniare 196
4.1.3. Distanța dintre două puncte. Lungimea unui segment 198
4.1.4. Unghiuri. Măsurarea unghiurilor 201
4.1.5. Calcule cu măsuri de unghiuri 207
4.1.6. Figuri congruente. Axă de simetrie 209
4.2. Unități de măsură 215
4.2.1. Unități de măsură pentru lungimi 215
4.2.2. Unități de măsură pentru arie 219
4.2.3. Unități de măsură pentru volum 221
4.2.4. Unități de măsură pentru capacitate 223
4.2.5. Unități de măsură pentru masă 224
4.2.6. Unități de măsură pentru timp 225
4.2.7. Unități monetare 226
4.3. Probleme de organizare a datelor, frecvență. Date statistice 227
4.3.1. Strângerea și organizarea datelor 227
4.3.2. Grafice cu bare sau cu linii 229
Probleme recapitulative 232
Teste de autoevaluare 233
Probleme recapitulative finale 234
Glosar 236
Indicații și răspunsuri 245
Tabelul numerelor prime mai mici de 10 000 261
Sugestii bibliografice 262

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

1. AM ÎNVĂȚAT ÎN CICLUL PRIMAR

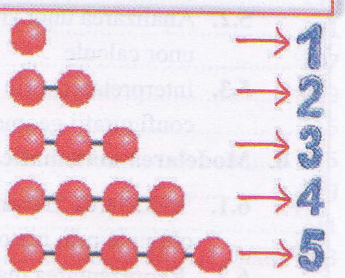
1.1. Numerele naturale și operații cu acestea

Aritmetica este o parte a matematicii care studiază și operează cu numere. Operațiile aritmetice învățate în clasele primare sunt: adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea. Întâlnim numere în diverse aplicații, motiv pentru care vom evidenția operații cu acestea utilizând configurații geometrice.

1.1.1. Adunarea numerelor naturale

Adunarea a două numere naturale este operația care asociază numerelor a și b numărul natural $a + b$, numit ***suma*** celor două numere date; a și b se numesc ***termenii*** sumei $a + b$.

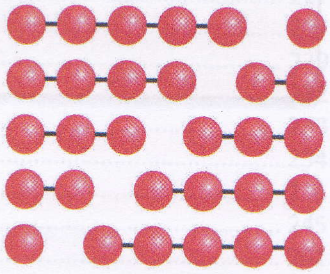
Considerăm bile identice care, grupate ca în figura alăturată, reprezintă primele 5 numere naturale nenule.



Prin adăugarea și adunarea succesivă a unei noi bile se obține șirul infinit al numerelor naturale nenule: **1, 2, 3, 4, 5, …, *n*, …**

Exemplu

Urmărind figura alăturată, să se descompună în toate modurile posibile numărul 6 ca o sumă de două numere naturale nenule.



Rezolvare: Se observă că pe rândul întâi sunt $5 + 1 = 6$ bile, pe al doilea rând, $4 + 2 = 6$ bile, pe al treilea rând, $3 + 3 = 6$ bile, pe al patrulea rând, $2 + 4 = 6$ bile, pe al cincilea rând, $1 + 5 = 6$ bile.

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Să reținem!

Într-o sumă, putem permuta ordinea celor doi termeni şi obţinem acelaşi rezultat.

Pentru a aduna numere care conţin mai multe cifre, acestea se aşază unul sub celălalt, astfel ca unităţile să fie pe aceeaşi coloană, zecile să se afle pe aceeaşi coloană ş.a.m.d. Se calculează suma cifrelor de pe fiecare coloană. Dacă suma are două cifre, atunci prima cifră se adună la coloana următoare şi ultima cifră a sumei se scrie pe coloana sa.

Exemplu

Să se determine sumele numerelor din tabelul din stânga:

a	b	$a+b$
17	13	?
315	417	?
914	114	?

Rezolvare:

a	b	$a+b$
17	13	30
315	417	732
914	114	1028

.

Să reținem!

Adunarea este o operaţie, iar suma este un număr natural obţinut în urma efectuării operaţiei de adunare.

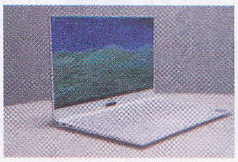
1.1.2. Scăderea numerelor naturale

Pentru două numere naturale a şi b, cu $a > b$, se defineşte numărul natural nenul c având proprietatea $b + c = a$. Numărul c se numeşte ***diferenţa*** dintre a şi b, notaţia fiind $\boldsymbol{c = a - b}$. În acest caz, a se numeşte ***descăzut***, b se numeşte ***scăzător***.

Exemplu

Vlad are în contul personal 12 500 lei şi achiziţionează un laptop în valoare de 2 800 lei, plătind cu cardul. Ce sumă i-a rămas în contul personal?

12 500 lei



2 800 lei

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Rezolvare: Valoarea obiectului achiziționat (laptop) este mai mică decât suma pe care o posedă în cont, deci va putea plăti (2 800 < 12 500).

După tranzacție, Vlad va rămâne cu 12 500 lei – 2 800 lei = 9 700 lei. Dacă la valoarea rămasă (9 700 lei) adunăm valoarea obiectului achiziționat (2 800 lei), se obține valoarea inițială aflată în contul personal: 9 700 lei + 2 800 lei = 12 500 lei.

Să reținem!

Scăderea numerelor care conțin mai multe cifre se face pe coloane. Mai întâi se scad unitățile, apoi zecile ș.a.m.d. Când nu este posibil, se împrumută o unitate din coloana următoare.

Exemplu

Să se determine diferențele numerelor din tabelul din stânga:

a	b	$a-b$
61	10	?
201	17	?
640	84	?

Rezolvare:

a	b	$a-b$	*verificare*
61	10	51	$10+51=61$
201	17	184	$17+184=201$
640	84	556	$84+556=640$

Să reținem!

Scăderea a două numere naturale se poate efectua numai dacă descăzutul este mai mare sau egal cu scăzătorul. De exemplu, diferența 5 – 7 nu este număr natural, deci nu putem efectua operația. (Din 5 lei nu pot cheltui 7 lei.) În cazul în care este posibilă operația, rezultatul este un număr natural, adică diferența celor două numere este un număr natural.

Exemple

1. Unul dintre poeții și muzicienii străluciți care au marcat începuturile epocii de glorie artistică din Grecia a fost Terpandru (adică „fermecătorul"), care a venit din insula Lesbos în Sparta în anul 670 î.Hr. El a adăugat lirei cu 4 coarde încă 3 coarde. Câte coarde avea lira sa?

Rezolvare: 4 + 3 = 7.

Libris.RO Respect pentru oameni și cărți

Lira cu 7 coarde se mai numeşte *heptacord.* Se pare că era cunoscută încă din vremea regelui Minos, iar cu ajutorul ei, Terpandru a potolit o revoltă populară prin interpretarea unor cântece ale sale.

2. Timoteu, care a trăit în generaţia care i-a urmat lui Terpandru, a adăugat lirei cu 7 coarde încă 4 coarde. Câte coarde are lira obţinută?

Rezolvare: $7 + 4 = 11$.

La un concurs, lui Timoteu nu i s-a permis să participe cu noua sa liră decât după ce i s-au îndepărtat acesteia coardele suplimentare de către efori.

1.1.3. Înmulţirea numerelor naturale

Dacă se consideră două numere naturale a şi b, prin ***operaţia de înmulţire*** se asociază numărul natural d, notat $d = a \cdot b$, numit ***produsul*** numerelor date; a şi b se numesc factorii produsului.

Exemple

Dorim să înmulţim 4 cu 6, adică să adunăm de şase ori numărul 4 cu el însuşi. Acest lucru este ilustrat în figura a), care conţine 4 coloane şi 6 linii. Se obţine produsul $4 \cdot 6$.

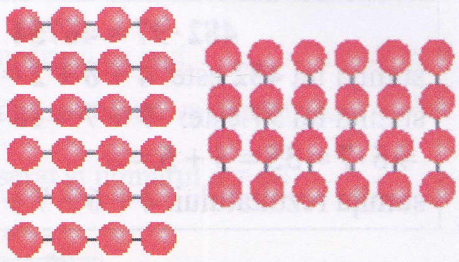


Fig. a) Fig. b)

Dacă întoarcem figura astfel încât să avem 6 coloane şi 4 linii, figura b), obţinem produsul $6 \cdot 4$, dar numărul de unităţi nu se modifică.

Să reţinem!

Vom utiliza pentru înmulţire semnul „·” înlocuind semnul „×”, utilizat în clasele anterioare. Motivaţia este legată de utilizarea simbolului „×” pentru alte obiecte matematice care se vor studia în clasele superioare (vectori, produs cartezian etc.).

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Exemplu

Să se determine produsele numerelor din tabelul:

a	b	$a \cdot b$
7	10	?
9	7	?
25	15	?

Rezolvare:

a	b	$a \cdot b$
7	10	70
9	7	63
25	15	375

PROBA ÎNMULŢIRII (PROBA CU 9)

Fără a utiliza un calculator, ne punem problema de a verifica dacă am efectuat corect înmulţirea a două numere. Vă prezentăm o modalitate uşoară prin care putem verifica corectitudinea ei.

Considerăm un caz particular. Fie $a = 482$, $b = 97$. Să se verifice dacă $a \cdot b = 46\,754$. Suma cifrelor deînmulţitului a este $4 + 8 + 2 = 14$, apoi suma cifrelor acestui număr este $1 + 4 = 5$, care va fi numită sumiţă. Determinăm sumiţa înmulţitorului b, $9 + 7 = 16$, iar, $1 + 6 = 7$. Cele două sumiţe obţinute se înmulţesc (la fel ca numerele din care provin). Obţinem $5 \cdot 7 = 35$. Sumiţa $3 + 5 = 8$ o comparăm cu sumiţa produsului $a \cdot b$. Deci, $4 + 6 + 7 + 5 + 4 = 26$, $2 + 6 = 8$. Sumiţele obţinute sunt egale, de unde tragem concluzia că înmulţirea este corectă. Dacă cele două sumiţe ar fi fost diferite, atunci rezultatul înmulţirii ar fi fost greşit şi am fi fost obligaţi să depistăm eroarea de calcul prin reluarea înmulţirii. Există cazuri rare în care proba cu 9 nu depistează greşeala.

$482 \cdot 97 = 46754$
sumiţa lui 482 este: $4 + 8 + 2 = 14 \Rightarrow 1 + 4 = 5$
sumiţa lui 97 este: $9 + 7 = 16 \Rightarrow 1 + 6 = 7$
$\Rightarrow 5 \cdot 7 = 35 = 3 + 5 = 8$
sumiţa rezultatului: $4 + 6 + 7 + 5 + 4 = 26 \Rightarrow 2 + 6 = 8$

1.1.4. Împărţirea numerelor naturale

1. ÎMPĂRŢIREA CU REST 0

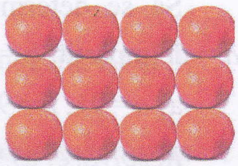
Fiind date numerele naturale nenule a şi b, dacă există numărul natural nenul c, pentru care $a = b \cdot c$, atunci spunem că **$a : b = c$**.

$a : b = c$

deîmpărţit — împărţitor — cât

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Exemplu



Avem de împărțit în mod egal 12 mandarine la 4 copii. Efectuând distribuirea succesivă a acestora, remarcăm că fiecare copil primește câte 3 mandarine. Deducem că 12: 4 = 3.

Numărul 12 este deîmpărțitul (ceea ce trebuie distribuit), numărul 4 este împărțitorul (numărul de grupe în care distribuim obiectele date) și numărul 3 este câtul (ceea ce primește fiecare copil).

Dar, nu putem distribui în mod egal 12 mandarine la 5 copii fără a tăia două mandarine în părți mai mici. Din acest motiv, vom recurge la teorema împărțirii cu rest.

2. ÎMPĂRȚIREA CU REST

Fiind date numerele naturale a și b, cu $b \neq 0$, atunci există și sunt unice numerele naturale c, r pentru care $\boldsymbol{a = b \cdot c + r}$, unde $0 \leq r < b$.

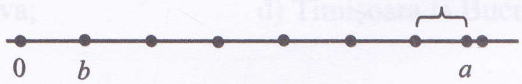
În acest caz, a= deîmpărțit, b= împărțitor, c = cât, r = rest.

Exemplu

Fiind date numerele $a = 54$, $b = 8$, să se aplice teorema împărțirii cu rest.

Rezolvare: Vom scrie multiplii lui 8 până când primul dintre aceștia va depăși numărul 54.

Avem: $0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, (54), 56$, unde am inserat și numărul $a = 54$.



Obținem $54 = 8 \cdot 6 + 6, 0 \leq 6 < 8$ sau $a = b \cdot 6 + r, 0 \leq r < b$.

Să reținem!

Cum r este număr natural, puteam scrie în teoremă, la fel de bine, și $r < b$. Am preferat prima scriere pentru a evidenția și pentru mai târziu (în cadrul numerelor întregi) faptul că restul este un număr natural. Dacă $r = 0$, atunci $a = b \cdot c$, adică putem distribui în mod egal a obiecte în b cutii.

Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

Exemplu

Să se determine câtul şi restul împărţirii pentru perechile de numere a şi b, unde a = deîmpărţit, b = împărţitor:

a) $a=91$, $b=97$; b) $a=120$, $b=15$; c) $a=349$, $b=20$.

Rezolvare: a) $91=97\cdot 0+91$, $c=0$, $r=91<97$;

b) $120=15\cdot 8$, deci $c=8$, $r=0$;

c) $349=20\cdot 17+9$, $c=17$, $r=9$.

Să ne amuzăm!

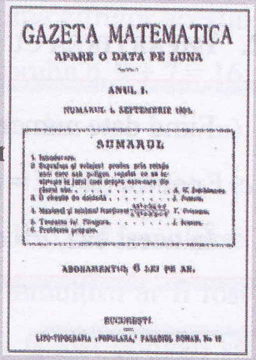
Creatorii Gazetei Matematice

Ne amintim în fiecare an, în data de 15 septembrie, că în anul 1895 a apărut revista *Gazeta Matematică*. Primii fondatori erau în majoritate ingineri, care, cu o zi mai devreme, pe 14 septembrie 1895, au dat în folosinţă Podul de peste Dunăre de la Cernavodă. Lucrarea era celebră în Europa timpului, iar director a fost Anghel Saligny. Pentru a reţine uşor iniţialele numelor celor 4 „stâlpi" ai gazetei, vom scrie IŢIC: **I**onescu Ion,

Ţiţeica Gheorghe,

Ioachimescu Andrei,

Cristescu Vasile.


GAZETA MATEMATICA
APARE O DATA PE LUNA
ANUL I.
NUMARUL 1. SEPTEMBRIE 1895.
SUMARUL
ABONAMENTUL 6 LEI PE AN.
BUCURESTI

Îl remarcăm printre redactori pe marele geometru şi profesor universitar Gheorghe Ţiţeica. Menţionăm că toţi marii noştri matematicieni şi-au făcut „ucenicia" la *Gazeta Matematică*.

Ştiaţi că...

Pitagora împărţea viaţa unui om în patru părţi: „Douăzeci de ani eşti copil, douăzeci adolescent, douăzeci om adult şi douăzeci bătrân". Acestea corespund celor patru anotimpuri din natură: copilăria – primăverii, adolescenţa – verii, vârsta adultă – toamnei şi bătrâneţea – iernii. În această metaforă filosofică este prefigurată pedagogia şi psihologia vârstelor.

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Exerciții propuse

1. Reprezentați printr-un desen, cu ajutorul bulinelor, numerele naturale cuprinse între 4 și 9.

2. Să se descompună în toate modurile posibile numărul 7, ca o sumă de două numere naturale nenule. (Generalizare)

3. Folosiți buline pentru a verifica egalitatea: $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$.

4. Să se completeze tabelul următor:

a	b	$a+b$	$a-b$	$a \cdot b$
49	5			
23	17			
201	99			

5. Tabelul următor precizează, în kilometri, distanțele rutiere de la București la diferite orașe pe ruta București-Timișoara.

Oraș	*București*	*Roșiorii de Vede*	*Craiova*	*Filiași*	*Caransebeș*	*Timișoara*
kilometri	0	100	209	245	432	533

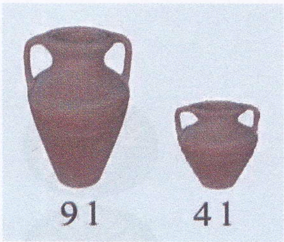
Calculați distanțele de la:

a) Roșiorii de Vede la Craiova; b) Craiova la Timișoara;

c) Caransebeș la Craiova; d) Timișoara la București.

6. Avem două vase negradate de 9 l și, respective, 4 l. Cum putem aduce de la râu:

a) 6 l de apă; b) 7 l de apă?



7. Să se aplice teorema împărțirii cu rest pentru perechile de numere:

a) $a = 54$, $b = 15$; b) $a = 68$, $b = 11$;

c) $a = 509$, $b = 10$; d) $a = 90$, $b = 100$.

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

8. Paul are într-un cont la bancă o sumă de bani. I se adaugă din salariu suma de 3 600 lei și apoi cheltuiește 2 700 lei. Verifică apoi valoarea rămasă, care este de 6 000 lei. Ce sumă de bani a avut inițial?

9. Se pot așeza pe un cerc numerele naturale 1, 2, 3, ..., 20 astfel încât diferența oricăror două numere alăturate să nu fie mai mare decât 2?

10. Scriem numerele naturale de la 1 la 1 000 fără a le despărți. Se formează o secvență de cifre.

a) Câte cifre sunt scrise în secvență?

b) Să se determine a 200-a cifră din secvență.

c) Determinați o altă cifră din secvență la alegere. După ce o determinați, propuneți-i unui coleg problema.

11. Fără a utiliza calculatorul, să se efectueze următoarele înmulțiri, apoi să se verifice corectitudinea acestora prin utilizarea *probei cu 9*:

a) $54 \cdot 63$; b) $342 \cdot 72$; c) $786 \cdot 98$; d) $769 \cdot 654$.

12. Verificați dacă $567 \cdot 874 = 485\,558$, utilizând *proba cu 9*.

13. În următorul joc sudoku (vezi și imaginea alăturată), se dau șase simboluri care au poziția dată. Se cere să se completeze astfel încât, pe fiecare linie și pe fiecare coloană, să se afle câte unul dintre cele șase simboluri.

×		•			⊙
*			⊙		⊗
		*		⊕	•
	⊗		•		
•	×			⊙	⊕
		⊕		×	

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

1.2. Fracții

Prin fracție, înțelegem o parte sau mai multe părți ale unității care a fost divizată în părți egale.

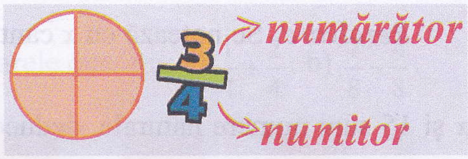
Să reținem!

O fracție este reprezentată prin două numere plasate unul deasupra celuilalt și separate de o linie, numită linie de fracție:

– ***numărul superior*** (***numărătorul***) arată câte părți egale se consideră dintr-un întreg;

– ***numărul inferior*** (***numitorul***) arată numărul de părți egale în care a fost împărțit întregul.

De exemplu: fracția $\frac{3}{4}$ are 3 părți la numărător și 4 părți la numitor. Am împărțit întregul în 4 părți egale, apoi am considerat 3 dintre acestea. Linia de fracție se mai notează „/”. Astfel, uneori, vedem scris 3/4.



Pentru a citi o fracție, enunțăm numărătorul, apoi numitorul, la care adăugăm terminația ***imi***.

Exemplu: fracția $\frac{3}{5}$ se citește „trei cincimi”.

O fracție reprezintă câtul dintre numărător prin numitorul ei.

Exemplu: $\frac{6}{2} = 3$, deoarece $6 = 2 \cdot 3$. Când împărțirea se face exact, fracția este un număr natural.

Să investigăm!

Analizând următoarele trei fracții, $\frac{5}{8}$; $\frac{8}{8}$; $\frac{11}{8}$, și comparând numărătorii cu numitorii acestora, observăm că: la fracția $\frac{5}{8}$ avem $5 < 8$, la fracția $\frac{8}{8}$ avem $8 = 8$ la fracția $\frac{11}{8}$ avem $11 > 8$.